



Maxima -
Ein Freies CAS

D. Thaler

Einleitendes

Erste Schritte

Arithmetik und
Algebra

Analysis

Scripts und
Programmierung

Sonstiges

Beispiel:
kurzweilige
atmosph.
Strahlungs-
übertragung

Zusammen-
fassung

Maxima - Ein Helfer in der Not

Ein Freies Computer Algebra System

Dietmar Thaler

dietmar(punkt)thaler(auf)posteo(punkt)at
<https://glt.foehnwall.at/glt19.html>

Grazer Linxstage 26.-27. April 2019





Motivation ..

.. früher: Zettel, Bleistift, Bronstein, ..

Einleitendes

Erste Schritte

Arithmetik und Algebra

Analysis

Scripts und Programmierung

Sonstiges

Beispiel: kurzweilige atmosph. Strahlungsübertragung

Zusammenfassung



$$Z_1 = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_0}\right) - \frac{z_2}{H_w}}{\frac{1}{H_c} - \frac{1}{H_w}}$$

$$H_c = \frac{RT_c}{g} \quad H_c = \frac{RT_w}{g}$$

Def: $\pi = \ln\left(\frac{p_2}{p_0}\right)$

$$d\pi = \frac{\partial z_1}{\partial \pi} d\pi + \frac{\partial z_1}{\partial H_c} dH_c + \frac{\partial z_1}{\partial H_w} dH_w$$

$$d\pi = \frac{\partial z_1}{\partial \pi} d\pi + \frac{\partial z_1}{\partial H_c} dH_c + \frac{\partial z_1}{\partial H_w} dH_w$$

314

Integralrechnung

$$X = ax^2 + bx + c, \quad A = 4ac - b^2, \quad k = \frac{4a}{d}$$

$$\int x \sqrt{X} dx = \frac{X \sqrt{X}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2} \sqrt{X} - \frac{b}{4a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{siehe Nr. 241}).$$

$$\int \sqrt{X} dx = \frac{x^2 \sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a} \int X \sqrt{X} dx \quad (\text{siehe Nr. 246}).$$

$$\int (n+1/2) dx = \frac{X(2n+3)/2}{(2n+3)a} - \frac{b}{2a} \int X^{(2n+1)/2} dx \quad (\text{siehe Nr. 248}).$$

$$x = \left(x - \frac{5b}{6a}\right) \frac{X \sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2 - 4ac}{10a^2} \int \sqrt{X} dx \quad (\text{siehe Nr. 245}).$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\frac{2\sqrt{cX}}{x} + \frac{2c}{x} + b\right) dx + C \quad \text{für } c > 0,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arsh} \frac{bx+2c}{x\sqrt{d}} + C_1 \quad \text{für } c > 0, d > 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{bx+2c}{x} \quad \text{für } c > 0, d = 0,$$

$$-\operatorname{arcsin} \frac{bx+2c}{x\sqrt{-d}} \quad \text{für } c < 0, d < 0.$$

$$\frac{b}{1c} \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} \quad (\text{siehe Nr. 258}).$$

$$\frac{dx}{x} + c \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} \quad (\text{siehe Nr. 241 und 258}).$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} \quad (\text{siehe Nr. 241 und 258}).$$

$$\frac{1/2}{x} + \frac{b}{2} \int X^{(2n-1)/2} dx + c \int \frac{X^{(2n-1)/2}}{x} dx \quad (\text{siehe Nr. 248 und 260}).$$



Computeralgebrasystem (CAS)

Wikipedia: Ein Computeralgebrasystem (CAS) ist ..

- .. ein Computerprogramm, das der Bearbeitung algebraischer Ausdrücke dient.
- Es löst nicht nur mathematische Aufgaben mit Zahlen (wie ein einfacher Taschenrechner), ..
- .. sondern auch solche mit symbolischen Ausdrücken
- (wie Variablen, Funktionen, Polynomen und Matrizen).



Über Maxima ..

- **Open Source CAS**
- freie Version von **Macsyma** (begründet in den 1960iger-Jahren am MIT)
- Programmiert in Lisp
- seit 1982: Entwicklung durch **William Schelter** (1947 - 2001)
- seit 1998 unter der GPL
- seit 2001: **Maxima**, derzeit auf maxima.sourceforge.net (Jan. 2019 Vers. 5.42.2)



Installation

- 1 **Allgemein:** maxima.sourceforge.net/download.html
- 2 **Linux:** Über die Standard-Repositories der Distros:
z.B. Ubuntu/Debian: `sudo apt install maxima`
- 3 **Windows:** maxima.sourceforge.net/windows-install.html
- 4 **MacOS:** sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-MacOS/
- 5 **Android:** sites.google.com/site/maximaonandroid/
- 6 **Direkt aus den Quellen:** sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-source/



User Interface - Frontend

- Terminal: **maxima:**
(Teil jeder Installation)
- einfache GUI: **xmaxima:**
(nach zu installieren, im Windows-Installer integriert)
- komfortable GUI: **wxmaxima**
wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/help.html
(nach zu installieren, im Windows-Installer integriert)



Maxima im Terminal

```
thl@thl-nb-001% maxima
Maxima 5.41.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) █
```



Maxima -
Ein Freies CAS

D. Thaler

Einleitendes

Erste Schritte

Arithmetik und
Algebra

Analysis

Scripts und
Programmierung

Sonstiges

Beispiel:
kurzweilige
atmosph.
Strahlungs-
übertragung

Zusammen-
fassung

xmaxima

File Edit Options Maxima Help

(%i1) |

Started Maxima



The screenshot shows the wxMaxima application window. The title bar indicates the date and time: 2019-02-09 (Sa) 08:35:18 CET. The window title is wxMaxima 18.02.0 [nicht gespeichert*]. The menu bar includes Datei, Bearbeiten, Anzeige, Zellen, Maxima, Gleichungen, Algebra, Rechnen, Vereinfachen, Liste, Plotten, Numerisch, and Hilfe. The toolbar contains various icons for file operations and mathematical functions. On the left, there are two panels: 'Mathematische Symbole' and 'Griechische Buchstaben'. The main workspace displays a list of Maxima commands and their corresponding mathematical expressions:

- (%i1) `g: x·exp(-x);` $g: x \cdot \exp(-x);$
- (g) `x %e-x` $x e^{-x}$
- (%i2) `diff(g,x,2);` $\frac{d^2}{dx^2} (x e^{-x})$
- (%o2) `x %e-x - 2 %e-x` $x e^{-x} - 2 e^{-x}$
- (%i4) `integrate(g,x);` $\int x e^{-x} dx$
- (%o4) `(-x - 1) %e-x` $(-x - 1) e^{-x}$

A '2D Plotten' dialog box is open, showing the following settings:

- Ausdruck: `x`
- Variable: `x` von: `-5` bis: `5` Logarithmische Skala
- Variable: `y` von: `0` bis: `0` Logarithmische Skala
- Startpunkte: `10`
- Format: `eingebel`
- Optionen:
- Datei:

Buttons for 'Besondere Werte', 'Abbrechen', and 'OK' are visible. The status bar at the bottom shows 'Maxima ist bereit.' and 'Bereit für Benutzereingabe'.



Dokumentation und Tutorials

- **Manual:**
maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima.html
- **Einführung:**
maxima.sourceforge.net/docs/manual/intromax.html
- **Deutsch:**
 - maxima.sourceforge.net/de/documentation.html
 - www.computermathematik.info (J. Weilharter)
 - www.austromath.at/daten/maxima/inhalt.htm
- **Empfehlung für den schnellen Einstieg:**
 - *R.H. Rand* : maxima.sourceforge.net/docs/manual/intromax.pdf
 - *R. Glöckner* : maxima.sourceforge.net/docs/tutorial/de/maxima-einfuehrung.pdf



Ein erster Schritt ..

```
Terminal
Datei Bearbeiten Ansicht Suchen Terminal Hilfe

Maxima 5.41.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) 3+5;
(%o1) 8
(%i2) 3.4*2.5;
(%o2) 8.5
(%i3) a: 3+5;
(%o3) 8
(%i4) b: 3.4*2.5$
(%o4) 8.5
(%i5) a+b;
(%o5) 16.5
(%i6) █
```

**Befehlsabschluss mit
Ergebnisanzeige**

Zuweisungsoperator

**Befehlsabschluss ohne
Ergebnisanzeige**

**Referenzierbare
Nummerierung**



.. und noch einer

Datei Bearbeiten Ansicht Suchen Terminal Hilfe

(%i1) $x^2-4;$

(%o1)

(%i2) factor(%);

(%o2)

(%i3) solve(%,x);

(%o3)

(%i4) solve(%i1=4,x);

(%o4)

(%i5) float(%);

(%o5)

(%i6)

% referenziert letzten
Output

$$x^2 - 4$$

$$(x - 2)(x + 2)$$

$$[x = -2, x = 2]$$

$$[x = -2^{3/2}, x = 2^{3/2}]$$

$$[x = -2.82842712474619, x = 2.82842712474619]$$



Besondere Befehle und Zeichen

maxima im Terminal:

- Jeden Befehl mit einem Semicolon **;<return>** abschließen
z.B.: **a: 1+2;** (Ergebnis wird angezeigt)
- Abschluss mit **\$<return>**
z.B.: **a: 1+2\$** (Ergebnis wird nicht angezeigt)
- Zeilennummerierung als Standardlabel:
 - `%i9;` wiederholt Eingabe 9
 - `%o9;` wiederholt Ausgabe (bzw. Ergebnis) 9
 - `%;` wiederholt letzte Ausgabe



Besondere Befehle und Zeichen

- Zuweisungszeichen ist der Doppelpunkt (Colon) :
z.B.: **a: 1+2;**
- Definition von Funktionen durch Colon und Gleichheitszeichen :=
z.B.: **f(x) := x+1\$**
- History-Funktionalität mit **<Cursor up, down>**
(bzw. wie in Emacs: **<Ctrl>P, <Ctrl>N**)
- Abbruch einer Berechnung mit **<Ctrl>C**
- Beenden mit **quit();<return>** oder **<Ctrl>D**



Einfache Datentypen

① Zahlen:

- Ganze und rationale Zahlen: 1 , -4 , $7/12$, \dots
- Gleitkommazahlen in doppelter Genauigkeit und beliebiger Genauigkeit:
 $7.2e-6$
 $1.4451929226177787252185035173736943082498401193775b0$
- Komplexe Zahlen: $3 + 4*i$

② Zeichenketten:

- "Zeichenkette"
- "Zeichenkette mit \"Doublequotes\" "

③ Listen:

- in eckiger Klammer: `meine_liste: [1, b, c+x, ...]`
- Zugriff: `meine_liste[2]` ergibt `b`



Einige Konstanten

Siehe auch maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_5.html#SEC19

`%pi` Kreiszahl π

`%e` Eulersche Zahl e

`%phi` Goldener Schnitt $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$

`%i` imaginäre Einheit i

`inf` positiv unendlich ∞

`minf` negativ unendlich $-\infty$

`infinity` komplex unendlich

`true` logisch wahr

`false` logisch falsch

... usw.



Operatoren

maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_7.html#SEC36

- + Addition
- Subtraktion
- * skalare Multiplikation
- / Division
- ^** oder ****** Potenzieren
- . Matrizen-Multiplikation
- : Zuweisungsoperator
- := Zuweisung von Funktionen
- ... usw.



Ausdrücke

Die meisten Dinge in Maxima sind Ausdrücke (*Expressions*). Ausdrücke bestehen aus einem „Atom“ oder einem Operator mit seinen Argumenten. Beispiele:

- 4
- x
- $3-x^{*} * 2$
- l: [3, a+b, g-x]
- ...



Funktionen (mathematisch)

maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_10.html#SEC49

$\text{sqrt}(x)$ Quadratwurzel

$\text{exp}(x)$ Exponentialfunktion

$\text{log}(x)$ (natürlicher) Logarithmus

$\text{sin}(x)$, $\text{cos}(x)$, $\text{tan}(x)$ Sinus, Cosinus, Tangens

$\text{asin}(x)$, $\text{acos}(x)$, $\text{atan}(x)$, $\text{atan2}(x,y)$ Arcussinus, -cosinus, -tangens, ..

.. u.s.w.



Arithmetik - Beispiel 1

Maxima rechnet exakt. Gleitkommadarstellungen müssen erzwungen werden.

```
(%o0) done
(%i1) 3/75+4/100;
(%o1) 2
  --
  25
(%i2) (1+sqrt(3))^2;
(%o2) (sqrt(3) + 1)2
(%i3) expand(%);
(%o3) 2 sqrt(3) + 4
(%i4) %, numer;
(%o4) 7.464101615137754
(%i5) fpprec: 50;
(%o5) 50
(%i6) bfloat(%o3);
(%o6) 7.4641016151377545870548926830117447338856105076208b0
(%i7) 39!;
(%o7) 20397882081197443358640281739902897356800000000
```



Arithmetik - Beispiel 2

Darstellung grundsätzlich über Brüche, Konstanten, Funktionen exakt.

```
(%o0) done
(%i1) a: 3/4 + 7/11;
(%o1) 61
      --
      44
(%i2) b: %pi + %e + sqrt(7);
(%o2) %pi + %e + sqrt(7)
(%i3) a*b;
(%o3) 61 (%pi + %e + sqrt(7))
      -----
      44
(%i4) %, numer;
(%o4) 11.79189030408907
(%i5)
```



Algebra - Vereinfachen

„**Rechnen mit Buchstaben**“ - Vergleiche Abschnitt „Simplification“ im Handbuch:
maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_9.html#SEC46

y ein beliebiger Ausdruck in einer oder mehreren Variablen

`ratsimp(y)` vereinfacht y und liefert einen Quotienten zweier Polynome

`expand(y)` expandieren ein Polynoms
(`ratexpand(y)` manchmal „stärker“ als `expand`)

`factor(y)` Faktorisieren

`trigsimp(y)` Vereinfachung eines trigonometrischen Ausdrucks

`logsimp(y)` Vereinfacht Ausdrücke mit Logarithmen

`radcan(y)` Vereinfacht Exponentialausdrücke, Logarithmen, Wurzeln

... usw.



Algebra - Beispiel

```
(%i1) y: (a+x)**2/(x-1);
```

```
(%o1)
```

$$\frac{(x + a)^2}{x - 1}$$

```
(%i2) expand(y);
```

```
(%o2)
```

$$\frac{x^2}{x - 1} + \frac{2ax}{x - 1} + \frac{a^2}{x - 1}$$

```
(%i3) ratsimp(%);
```

```
(%o3)
```

$$\frac{x^2 + 2ax + a^2}{x - 1}$$

```
(%i4) factor(%);
```

```
(%o4)
```

$$\frac{(x + a)^2}{x - 1}$$

```
(%i5)
```



Lösen von Gleichungen

Symbolisch: maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_20.html#SEC104

Numerisch: maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_22.html#SEC112

- Gleichungen und Gleichungssysteme (auch nichtlinear):
`solve([gl1, gl2, ..],[var1, var2, ..])`
Löst das algebraische Gleichungssystem gl_1, gl_2, \dots nach den Variablen var_1, var_2, \dots . Wenn gl_1, \dots keine Gleichung, sondern ein Ausdruck, dann wird $gl_1=0, \dots$ etc. vorausgesetzt.
- Numerische Löser:
 - `allroots (expr) ..` für Nullstellen komplexer Polynome in einer Variable:
Verwirft alle Nichtpolynome
 - `find_root (y,x,a,b) ..` Lösung für transzendente Gleichungen einer Variable. Findet **eine(!)** Nullstelle x von $y(x)$ im Intervall a,b . Falls sich im Intervall zwei Nullstellen befinden, dann nicht.
- USW. ..



solve() - Beispiel

```
(%o0) done
(%i1) f1: x**2/4 - 4*y + 5$
(%i2) f2: -x + 3*y - 4$
(%i3) solve([f1, f2], [x,y]);
(%o3) [[x = -  $\frac{2\sqrt{19} - 8}{3}$ , y =  $\frac{2\sqrt{19} - 20}{9}$ ],
      [x =  $\frac{2\sqrt{19} + 8}{3}$ , y =  $\frac{2\sqrt{19} + 20}{9}$ ]]
(%i4) solve([f1, f2], [x,y]), numer;
rat: replaced 0.25 by 1/4 = 0.25
(%o4) [[x = - 0.2392659623604493, y = 1.253578012546516],
      [x = 5.572599295693782, y = 3.190866431897927]]
(%i5) █
```



Grenzwert, Differenzieren, Reihen

① Grenzwert:

$\text{limit}(f,x,x_0,\text{direction})$ Grenzwert des Ausdrucks f für die Variable x , die gegen x_0 geht. direction .. **plus**: rechtsseitiger Grenzwerte, **minus** .. linksseitiger. direction kann ausgelassen werden, wenn zwischen Links- und Rechtsseitigem kein Unterschied besteht.

② Differenzieren:

$\text{diff}(f,x,n)$ Berechnet von der Funktion f von x die n -te Ableitung. Wird n weggelassen, dann ist es die erste Ableitung.

③ Reihen (*pars pro toto*):

$\text{taylor}(f, x, x_0, n)$ Taylorreihe (unendliche Potenzreihe) einer Funktion f in der Variablen x um den Punkt x_0 bis zum Glied der n -ten Ordnung



Grenzwert, Differenzieren, Reihen - Beispiel

Maxima -
Ein Freies CAS

D. Thaler

Einleitendes

Erste Schritte

Arithmetik und
Algebra

Analysis

Scripts und
Programmierung

Sonstiges

Beispiel:
kurzwellige
atmosph.
Strahlungs-
übertragung

Zusammen-
fassung

```
(%o0) done
(%i1) f: sin(x)/x$
(%i2) limit(f,x,0); limit(f,x,minf); limit(f,x,inf);
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 0
(%i5) diff(f,x);
(%o5)
      cos(x)  sin(x)
      -----  -----
       x       2
           x
(%i6) diff(f,x,2);
(%o6)
      sin(x)  2 sin(x)  2 cos(x)
      (- ----) + ---- - ----
        x       3       2
           x       x
(%i7) taylor(f,x,0,10);
(%o7)/T/
      2      4      6      8      10
      x      x      x      x      x
1 - -- + -- - -- + -- - -- + . . .
  6   120  5040  362880  39916800
(%i8) taylor(sin(x),x,0,11);
(%o8)/T/
      3      5      7      9      11
      x      x      x      x      x
x - -- + -- - -- + -- - -- + . . .
  6   120  5040  362880  39916800
(%i9)
```



Integration

`integrate(y,x)` Stammfunktion der Funktion $y(x)$, „unbestimmtes“ Integral

`integrate(y,x,a,b)` (bestimmtes) Integral der Funktion $y(x)$ zwischen den Grenzen a und b

Nützlich, um interaktive Abfragen für Fallunterscheidungen vorwegzunehmen:

- `assume(..)` .. Aussagen dem aktuellen Kontext hinzufügen, z.B. über das Vorzeichen von Koeffizienten, etc..
- `facts()` .. zeigt die aktuellen Aussagen



Integration - Beispiel

```
(%00) done
(%i1) g: (a*x+b)**(-1/n);
(%o1)
          1
-----
          1/n
(a x + b)
(%i2) assume(notequal(n, 1));
(%o2) [notequal(n, 1)]
(%i3) G: integrate(g,x);
(%o3)
          1 - 1/n
(a x + b)
-----
          1
          a (1 - -)
          n
(%i4) radcan(G);
(%o4)
          a n x + b n
-----
          1/n
(a n - a) (a x + b)
(%i5) █
```



Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Gewöhnliche Differenzialgleichungen ersten und zweiten Grades als Anfangs- und Randwertproblem. Z.B.:

- 1 Formulierung der DGI

$$d^2z/dt^2 = -\omega^2z: \quad \text{dgl: 'diff}(z, t, 2) = -\omega^2 * z$$

Achtung: **Apostroph** in 'diff

- 2 Annahmen formulieren: `assume(omega ** 2 > 0)`

- 3 Allgemeine Lösung mit `gsolv: ode2(dgl, z, t)`

- 4 Spezielle Lösung durch Angabe der Anfangswerte ($t = 0 : z = z_0, dz/dt = 0$):
`ic2(gsolv, t=0, z=z0, 'diff(z,t)=0)`

- 5 Spezielle Lösung: $z = z_0 \cos(\omega t)$



Beispiel - Harmonischer Oszillator

```
(%o0) done
(%i1) dgl: diff(z,t,2)=-omega**2*z;
(%o1)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

(%i2) assume(omega**2>0);
(%o2) [omega > 0]
(%i3) gsol: ode2(dgl,z,t);
(%o3) z = %k1 sin(omega t) + %k2 cos(omega t)
(%i4) ic2(gsol, t=0, z=z0, diff(z,t)=0);
(%o4) z = cos(omega t) z0
(%i5)
```



- Maxima-Befehle in eine Datei schreiben, z.B.: `ein_script.mac`
- `batch("ein_script.mac")`
- **Beispiel:**
 - hydrostatische Grundgleichung .. $dp/dz = -g\rho$
 - mit der Gasgleichung $\rho = p/(RT)$ folgt .. $dp/dz = -gp/(RT)$
 - gesucht ist die barometrische Höhenformel $p(z)$ für $p(z = 0) = p_0$ (mit $g, R, T = \text{const.}$):

```
kill(all); /* Speicher aufräumen */
assume(p>0, g>0, R>0, T>0)$
de: 'diff(p, z) = - g*p/(R*T);
gsol: ode2(de, p, z);
ssol: ic1(gsol, z=0, p=p0);
```




Script-Beispiel - Ergebnis

```
(%i1) batch("ode1.mac");
read and interpret file: #p/home/thl/uCloud/vortraege/GrazerLinuxTag/2019/scripts/ode1.mac
(%i2) kill(all)
(%o0) done
(%i1) assume(p > 0,g > 0,R > 0,T > 0,rho > 0)
(%o1) [p > 0, g > 0, R > 0, T > 0, rho > 0]
(%i2) rho:p/(R*T)
(%o2)
      p
      ---
      R T
(%i3) de:'diff(p,z) = (-g)*rho
(%o3)
      dp      g p
      -- = - ---
      dz      R T
(%i4) gsol:ode2(de,p,z)
(%o4)
      g z
      - ---
      R T
      p = %c %e
(%i5) ssol:ic1(gsol,z = 0,p = p_0)
(%o5)
      g z
      - ---
      R T
      p = p_0 %e
ode1.mac
```



Kleine Auswahl an nicht Behandeltem

- große Anzahl von Zusatzpaketen: `load(paket)`
- Grafik (basierend auf Gnuplot)
 - `plot2d`, `plot3d`, `draw..`
 - usw. ..
- File-IO
- Export von Ergebnissen in Fortran und \LaTeX
- Programmierung
 - Kontrollstrukturen
 - Arrays
- ...



KW-Strahlungsübertragung in der Atmosphäre Elementar

Stark vereinfacht ohne Wärmestrahlung und mit vielen weiteren hier nicht angeführten Annahmen:

D_0 Strahlung* von oben

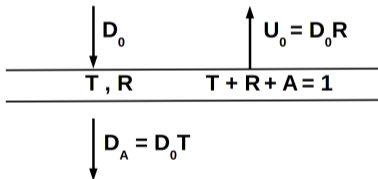
R diffus reflektierter Strahlungsanteil

T transmittierter Strahlungsanteil

A absorbierter Strahlungsanteil

U_0 nach oben diffus reflektierte
Strahlung

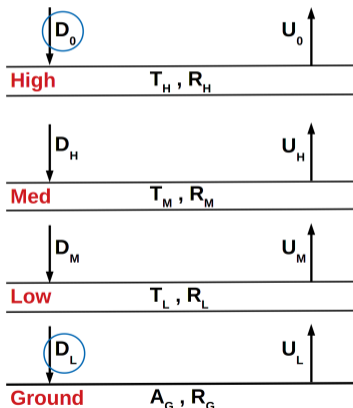
D_A von der semitransparenten Schicht
nach unten gerichtete Strahlung



* „Strahlung“: Strahlungsflussdichte (W/m^2) bzw. Beleuchtungsstärke (lux)

KW-Strahlungsübertragung in der Atmosphäre

3 + 1 Schichten-Modell



D_0 Strahlungsinput von oben

U_0 nach oben abstrahlende
Netto-Strahlungsflussdichte

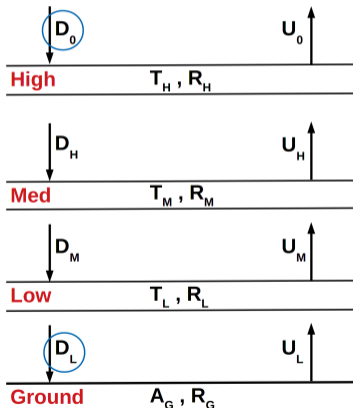
$D_{H,M,L}$ von den hohen (H), mittelhohen (M)
und tiefen (L) Wolken nach unten
gerichtet Strahlung

$U_{H,M,L}$ zu den hohen (H), mittelhohen (M)
und tiefen (L) Wolken nach oben
gerichtet Strahlung.

- **Gegeben** sind die $T_{H,M,L}$, $R_{H,M,L}$ sowie $R_G = 1 - A_G$ und D_0 , **gesucht** ist D_L .

KW-Strahlungsübertragung in der Atmosphäre

3 + 1 Schichten-Modell



- Sieben Gleichungen in den sieben Unbekannten $D_H, D_M, D_L, U_0, U_H, U_M, U_L$

$$D_H = D_0 T_H + U_H R_H$$

$$D_M = D_H T_M + U_M R_M$$

$$D_L = D_M T_L + U_L R_L$$

$$U_0 = U_H T_H + D_0 R_H$$

$$U_H = U_M T_M + D_H R_M$$

$$U_M = U_L T_L + D_M R_L$$

$$U_L = D_L R_G$$



KW-Strahlungsübertragung in der Atmosphäre

3 + 1 Schichten-Modell (Maxima Script)

```
kill(all)$
sys: [
D_H=D_0*T_H+U_H*R_H,
D_M=D_H*T_M+U_M*R_M,
D_L=D_M*T_L+U_L*R_L,
U_0=U_H*T_H+D_0*R_H,
U_H=U_M*T_M+D_H*R_M,
U_M=U_L*T_L+D_M*R_L,
U_L=D_L*R_G];
loes: solve(sys,[U_0,U_H,U_M,U_L,D_H,D_M,D_L])$
D3: loes[1][7]$
expand(D3);
```



KW-Strahlungsübertragung in der Atmosphäre

3 + 1 Schichten-Modell (Ergebnis)

Einleitendes

Erste Schritte

Arithmetik und
Algebra

Analysis

Scripts und
Programmierung

Sonstiges

Beispiel:
kurzwellige
atmosph.
Strahlungs-
übertragung

Zusammen-
fassung

(%i2) kill(all)

**(%i1) sys:[D_H = D_0*T_H+U_H*R_H,D_M = D_H*T_M+U_M*R_M,D_L = D_M*T_L+U_L*R_L,
U_0 = U_H*T_H+D_0*R_H,U_H = U_M*T_M+D_H*R_M,U_M = U_L*T_L+D_M*R_L,
U_L = D_L*R_G]**

(%i2) loes:solve(sys,[U_0,U_H,U_M,U_L,D_H,D_M,D_L])

(%i3) D3:loes[1][7]

(%i4) expand(D3)

$$\begin{aligned}
 (\%o4) \quad D_L = & -(D_0 T_H T_L T_M) / (R_G R_H T_L^2 T_M^2 - R_G R_H R_L^2 T_M^2 + R_H R_L T_M^2 - R_G R_H R_M^2 T_L^2 + R_G R_M T_L^2 + R_G \\
 & R_H R_L^2 R_M^2 - R_H R_L R_M^2 - R_G R_L^2 R_M - R_G R_H R_L R_M + R_L R_M + R_H R_M + R_G R_L - 1)
 \end{aligned}$$



KW-Strahlungsübertragung in der Atmosphäre

3 + 1 Schichten-Modell (Ergebnis)

$$D_L = D_0 \frac{T_L T_M T_H}{1 - \Psi_0}$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi_0 = & + R_G R_H T_L^2 T_M^2 - R_G R_H R_L^2 T_M^2 + R_H R_L T_M^2 - \\ & - R_G R_H R_M^2 T_L^2 + R_G R_M T_L^2 + R_G R_H R_L^2 R_M^2 - \\ & - R_H R_L R_M^2 - R_G R_L^2 R_M - R_G R_H R_L R_M + \\ & + R_L R_M + R_H R_M + R_G R_L . \end{aligned}$$



Maxima ist ein mächtiges Computer-Algebra-System

- + Ausgereift und stabil
- + Modular erweiterbar
- + Benutzeroberflächen für jeden Geschmack
- + umfangreiche Dokumentation und zahlreiche Tutorials
- – erreicht nicht Komfort und Qualität des kommerziellen Platzhirschen



Maxima ist ein mächtiges Computer-Algebra-System

- + Ausgereift und stabil
- + Modular erweiterbar
- + Benutzeroberflächen für jeden Geschmack
- + umfangreiche Dokumentation und zahlreiche Tutorials
- – erreicht nicht Komfort und Qualität des kommerziellen Platzhirschen



Maxima ist ein mächtiges Computer-Algebra-System

- + Ausgereift und stabil
- + Modular erweiterbar
- + **Benutzeroberflächen für jeden Geschmack**
- + umfangreiche Dokumentation und zahlreiche Tutorials
- – erreicht nicht Komfort und Qualität des kommerziellen Platzhirschen



Maxima ist ein mächtiges Computer-Algebra-System

- + Ausgereift und stabil
- + Modular erweiterbar
- + Benutzeroberflächen für jeden Geschmack
- + umfangreiche Dokumentation und zahlreiche Tutorials
- – erreicht nicht Komfort und Qualität des kommerziellen Platzhirschen



Maxima ist ein mächtiges Computer-Algebra-System

- + Ausgereift und stabil
- + Modular erweiterbar
- + Benutzeroberflächen für jeden Geschmack
- + umfangreiche Dokumentation und zahlreiche Tutorials
- – erreicht nicht Komfort und Qualität des kommerziellen Platzhirschen



Maxima -
Ein Freies CAS

D. Thaler

Einleitendes

Erste Schritte

Arithmetik und
Algebra

Analysis

Scripts und
Programmierung

Sonstiges

Beispiel:
kurzweilige
atmosph.
Strahlungs-
übertragung

Zusammen-
fassung

Ende

Danke für die Aufmerksamkeit!